TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG

BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ HỌC KỲ II NĂM HỌC 2023-2024
Môn: TOÁN KINH TẾ 2
Mã môn học: MATH132801
Đề số/Mã đề: 01. Đề thi có 02 trang.
Thời gian: 90 phút.
Sinh viên được phép sử dụng tài liệu gồm 1 tờ A4 chép tay.

Câu 1: (**1.0 điểm**). Tốc độ sản xuất của một công nhân sau t giờ làm việc cho bởi $\frac{dQ}{dt} = 100 + e^{-0.5t}$ (đơn vị sản phẩm trong 1 giờ). Giả sử người đó bắt đầu làm việc lúc 8h sáng. Anh/Chị hãy tính số sản phẩm mà người đó sản xuất được trong khoảng thời gian từ 9h đến 11h sáng.

Câu 2: (**1.0 điểm**). Cho hàm ẩn $z(x, y)$ xác định bởi phương trình

$$xyz^2 - 3y^2 + x^2 z + \frac{z}{y} = 100.$$

Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Câu 3: (**1.5 điểm**). Cho hàm cung và hàm cầu như sau

$$Q_s = -1 + 4P - P'(t) + 5P''(t)$$
$$Q_d = 9 - P + P'(t) + 3P''(t)$$

Giả sử $P(0) = P'(0) = 4$.

a) Xác định hàm giá cân bằng $P(t)$ nếu thị trường cân bằng tại mọi thời điểm.
b) Giá cân bằng $P(t)$ có ổn định không?

Câu 4: (**1.5 điểm**). Cho mô hình cung cầu thị trường $\begin{cases} S = 2p - 3 \\ D = 5Y - 2p^2 + 12 \end{cases}$ trong đó S, D lần lượt là hàm cung và hàm cầu của một loại hàng hóa, p là giá hàng hóa, Y là thu nhập. Nếu thu nhập tăng 0.2 đơn vị và thị trường cân bằng (tức là $S = D = Q$, với Q là lượng cung cầu cân bằng) thì giá cân bằng p và lượng cung cầu cân bằng Q sẽ tăng hay giảm bao nhiêu? Biết rằng mức giá đang là $p = 2$.

Câu 5: (**1 điểm**). Tuổi thọ của một loại bóng đèn (năm) là một biến ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & , \ 0 \le x < 1 \\ a(2-x)^2 & , \ 1 \le x < 2 \\ 0 & , \ x \ge 2 \end{cases}$$

trong đó a là một hằng số, $a \ge 0$. Xác định giá trị của hằng số a

Câu 6 : (2.0 điểm). Trong mô hình kinh tế vĩ mô, gọi Y_t là thu nhập quốc dân (GNP), C_t là lượng tiêu thụ của hộ gia đình, I_t là lượng đầu tư và G_t là lượng chi tiêu của chính phủ. Xét mô hình sau

$$\begin{cases} Y_t = C_t + I_t + G_t \\ C_t = 200 + 0.4Y_{t-1} \\ I_t = 100 + 0.3(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \\ G_t = 150 \end{cases}$$

Giả sử $Y_0 = 200, Y_1 = 300$.

a) Thiết lập phương trình vi phân cấp 2 theo thu nhập quốc dân, giải phương trình vi phân vừa thiết lập tìm Y_t.

b) Thu nhập quốc dân của nền kinh tế trên có ổn định không?

Câu 7: (**2.0 điểm**). Giả sử hàm sản xuất của một nhà máy cho bởi $Q = 80L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}$, trong đó L là số giờ lao động và K là lượng tiền vốn mà doanh nghiệp sử dụng. Chi phí để sản xuất Q đơn vị sản phẩm là $C = wL + rK$, với w, r lần lượt là tiền công (cho mỗi giờ lao động) và chi phí vốn (số tiền phải trả cho mỗi đơn vị vốn sử dụng). Xét bài toán cực tiểu hóa chi phí để nhà máy sản xuất được Q sản phẩm.

a) Thiết lập điều kiện bậc nhất cho bài toán trên.

b) Xác định lượng cầu vốn và lượng cầu lao động của bài toán trên.

c) Áp dụng định lý bao, Anh/Chị hãy cho biết sản lượng ảnh hưởng như thế nào đến chi phí cực tiểu.

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)	**Nội dung kiểm tra**
[G2.1]: Tính được vi phân toàn phần, đạo hàm riêng của hàm ẩn và tìm cực trị,giá trị lớn nhất, nhỏ nhất,... của hàm nhiều biến	Câu 2, 4, 7
[G2.2]: Mô hình hóa và giải được các bài toán cực trị trong kinh tế như cực đại hóa lợi nhuận, cực tiểu hóa chi phí…	Câu 7
[G2.3]: Tính được các tích phân và ứng dụng trong kinh tế	Câu 1, 5
[G2.4]: Áp dụng các phương pháp trong lý thuyết để tìm được nghiệm của một số dạng phương trình sai phân và phương trình vi phân cấp 1, cấp 2 và ứng dụng trong kinh tế.	Câu 3, 6

Ngày 19 tháng 05 năm 2024

Thông qua bộ môn

Phạm Văn Hiển

Trường Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật TP.HCM **Đáp án môn: TOÁN KINH TẾ 2**

KHOA KHUD – Bộ môn Toán **Mã môn học: MATH132801**

Ngày thi:

Câu	Nội dung	Thang điểm
1	$\int_1^3 Q'(t)dt = \int_1^3 \left(100 + e^{-0.5t}\right)dt$	0,5
	$= (100t - 2e^{-0.5t})\Big\|_1^3$	0,25
	$= 200 + 2\left(\frac{1}{e^{1/2}} - \frac{1}{e^{3/2}}\right) \approx 200.77$	0,25
2	$f(x,y,z) = xyz^2 - 3y^2 + x^2z + \frac{z}{y} - 100 = 0$ $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{yz^2 + 2xz}{2xyz + x^2 + \frac{1}{y}}$	0,5
	$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{xz^2 - 6y - \frac{z}{y^2}}{2xyz + x^2 + \frac{1}{y}}$	0,5
3	a) Thị trường cân bằng khi $Q_s = Q_d \Leftrightarrow P'' - P' + \frac{5}{2}P = 5$	0,25
	$P^* = 2, \quad k^2 - k + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \\ k_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \end{array}\right.$	0,5
	$\Rightarrow P(t) = 2 + e^{\frac{t}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}t + C_2 \cos\frac{3}{2}t\right)$	0,25
	b) Vì $\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$ nên giá cân bằng không hội tụ.	0,5

4	$\begin{cases} Q = 2p - 3 \\ Q = 5Y - 2p^2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q - 2p + 3 = 0 \\ Q - 5Y + 2p^2 - 12 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} dQ - 2dp = 0 \\ dQ - 5dY + 4pdp = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dQ}{dY} - 2\frac{dp}{dY} = 0 \\ \frac{dQ}{dY} + 4p\frac{dp}{dY} = 5 \end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow \frac{dQ}{dY} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 4p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4p \end{vmatrix}} = \frac{10}{4p+2}; \quad \frac{dp}{dY} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4p \end{vmatrix}} = \frac{5}{4p+2}$	0,5
	Ở mức giá p = 2, nếu thu nhập tăng 0.2 đơn vị thì $dQ = \frac{10}{4*2+2} * 0.2 = 0.2; \quad dp = \frac{5}{4*2+2} * 0.2 = 0.1$ Vậy giá cân bằng tăng 0.1 đơn vị và sản lượng cân bằng tăng 0.2 đơn vị.	0,5
5	a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{1} ax^2 dx + \int_{1}^{2} a(2-x)^2 dx = 1$ Tuổi thọ trung bình của bóng đèn là 1 năm	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{2}{3}a = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$	0,5
6	a) $Y_t - 0.7Y_{t-1} + 0.3Y_{t-2} = 450$	0,5
	$Y^* = \frac{4500}{7}$	0,25
	Phương trình đặc trưng $r^2 - 0.7r + 0.3 = 0$ có nghiệm $r_1 = \frac{1}{20}(7 - i\sqrt{71}), r_2 = \frac{1}{20}(7 + i\sqrt{71})$	0,25
	Nghiệm tổng quát $Y_t = \frac{4500}{7} + A_1\left(\frac{1}{20}(7 - i\sqrt{71})\right)^t + A_2\left(\frac{1}{20}(7 + i\sqrt{71})\right)^t$	0,25
	$Y_0 = 200, Y_1 = 300$ suy ra $200 = \frac{4500}{7} + A_1 + A_2$ $300 = \frac{4500}{7} + A_1\left(\frac{1}{20}(7 - i\sqrt{71})\right) + A_2\left(\frac{1}{20}(7 + i\sqrt{71})\right)$ Giải hệ ta được $A_1 = -\frac{1550}{7} + \frac{13150i}{7\sqrt{71}}, A_2 = -\frac{1550}{7} - \frac{13150i}{7\sqrt{71}}$	0,25

	Nghiệm $Y_t = \frac{4500}{7} + (-\frac{1550}{7} + \frac{13150i}{7\sqrt{71}}) \left(\frac{1}{20}\left(7 - i\sqrt{71}\right)\right)^t - (\frac{1550}{7} + \frac{13150i}{7\sqrt{71}}) \left(\frac{1}{20}\left(7 + i\sqrt{71}\right)\right)^t$	0.25
	b) Vì $\lvert r_1\rvert = \lvert r_2\rvert < 1$ nên thu nhập quốc dân trong mô hình trên là ổn định.	0.25
7	a) Hàm Lagrange $La(L,K,\lambda,w,r,Q) = wL + rK + \lambda\left(Q - 80L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}\right)$	0,25
	Điều kiện bậc nhất $\begin{cases} \frac{\partial La}{\partial L} = w - 20\lambda L^{-\frac{3}{4}}K^{\frac{3}{4}} = 0 \\ \frac{\partial La}{\partial K} = r - 60\lambda L^{\frac{1}{4}}K^{-\frac{1}{4}} = 0 \\ \frac{\partial La}{\partial \lambda} = Q - 80L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}} = 0 \end{cases}$	0,5
	b) Từ điều kiện bậc nhất ta có $\begin{cases} 20\lambda L^{-\frac{3}{4}}K^{\frac{3}{4}} = w \quad (1) \\ 60\lambda L^{\frac{1}{4}}K^{-\frac{1}{4}} = r \quad (2) \\ 80L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}} = Q \quad (3) \end{cases}$ Lấy (2) chia (1) ta được $L = \frac{r}{3w}K$.	0,25
	Thay vào (3) ta có $K^* = \frac{Q}{80}\left(\frac{3w}{r}\right)^{\frac{1}{4}}$; $L^* = \frac{Q}{80}\left(\frac{3w}{r}\right)^{-\frac{3}{4}}$	0,5
	c) Áp dụng định lý bao ta có $\frac{\partial C^*}{\partial Q} = \frac{\partial La(w,r,Q)}{\partial Q}\Big\vert_{\substack{L=L^* \\ K=K^* \\ \lambda=\lambda^*}} = \lambda^* = \frac{w}{20}L^{*\frac{3}{4}}K^{*-\frac{3}{4}} = \frac{1}{20}3^{-\frac{3}{4}}w^{\frac{1}{4}}r^{\frac{3}{4}} > 0$ Như vậy nếu sản lượng tăng 1 đơn vị thì chi phí cực tiểu sẽ tăng $\frac{1}{20}3^{-\frac{3}{4}}w^{\frac{1}{4}}r^{\frac{3}{4}}$ đơn vị.	0,5